线性代数笔记32——线性变换及对应矩阵

原文：https://mp.weixin.qq.com/s/qCmstZdzCy1WCfBAkEZEoA

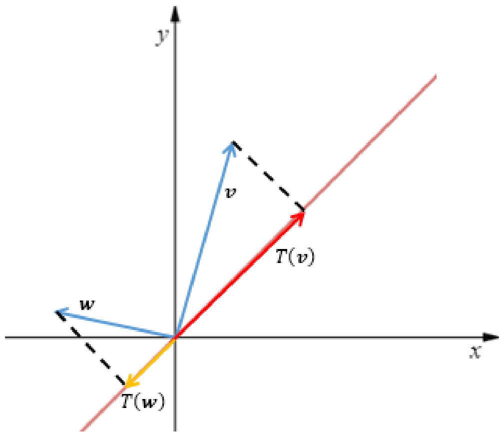
线性变换这个词在线性代数中经常被提及，每个线性变换的背后都有一个矩阵。矩阵的概念比较直观，相比之下，线性变换就显得抽象了。

线性变换

抛开矩阵，我们从变换的角度讨论投影。通过T变换，使平面内的一个向量投影到一条直线上：

$$T: R^2 \to R^2$$

T就像一个函数：给定一个输入向量，经过T的变换，输出成直线上的投影，过去我们一直用更专业的“映射”称呼这种变换关系。下图中**v**和**w**是R^2空间内的向量，通过T变换变成了直线上的投影，即T(**v**)和T(**w**)：



变换的关系有很多，而线性代数只讨论线性变换。如果T表示一个线性变换关系，对于任意向量**v**和**w**以及标量c，线性变换应该保证下面两个运算的不变性，加法不变性和数乘不变性，这一点和线性组合类似：

$$T(v+w) = T(v) + T(w)$$
$$T(cv) = cT(v)$$

把二者结合：

$$T(cv + dw) = cT(v) + dT(w)$$

顺便说一下，投影变换是一种线性变换。

判断线性变换

判断一个变换是否是线性变换其实并不困难，只要判断这个变换是否满足加法不变性和数乘不变性即可。

反例1：平移整个平面

假设某个变换关系T是平面沿着某个方向平移$\mathbf{v}_0$，也就是说对于平面内的任意向量**v**，都有T(**v**) = **v** + $\mathbf{v}_0$，T变换是否是线性变换？

这个看起来很简单的变换并不是线性变换，它违背了线性变换的两个不变性，以数乘不变性为例：

$$\text{If } \boldsymbol{v}_0 \neq \mathbf{0}, \quad \text{then } T(2\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0 \neq 2\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v}_0 = 2T(\boldsymbol{v})$$

线性变换的不变性要求对输入空间内的任意向量都成立，当然也包括零向量，因此一个更简单的判断方法就是使用零向量。数乘不变性对于零向量来说将有T(**0**) = **0**，但本例中T(**0**) = $\mathbf{v}_0$，所以说“平移”变换不是线性变换。

反例2：求向量的长度

变换关系T(**v**) = ||**v**||是否是线性变换？

T变换将产生维度的变化。假设**v**是一个三维向量，经过T的变换将变成一个大于等于0的实数，也就是一维向量：

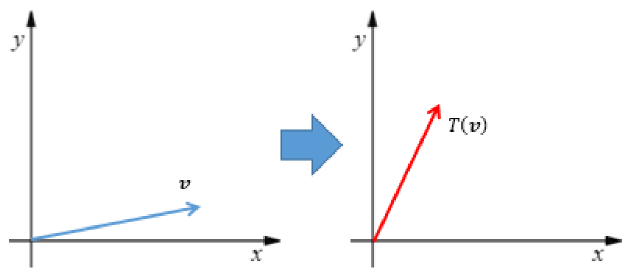
$$T: \ R^3 \rightarrow R^1$$

虽然本例满足T(**0**) = 0，但是对于数乘不变性来说，如果c是负数，那么T(c**v**) ≠ cT(**v**)，因此本例不是线性变换。

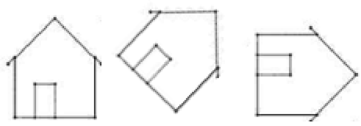
正例1：旋转变换

变换关系T：$R^2 \rightarrow R^2$是将一个二维空间的向量旋转45°，这个变换是否是线性变换？

答案是肯定的，它符合线性变换的两个不变性。



即使去掉坐标轴，依然能够清晰地描述这个变换，下图是对二维平面内的图形进行旋转：



正例2：线性变换与矩阵

到目前为止，线性变换还没有和矩阵产生任何关系。现在有一个变换关系是矩阵乘以一个向量，T(**v**) = **Av**，其中**A**是一个矩阵。根据矩阵乘法的性质：

$$T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{w})$$

$$T(c\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}(c\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{v})$$

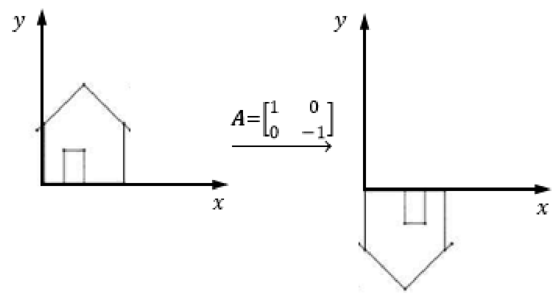
这符合线性变换的两个判据，因此矩阵乘以向量是一个线性变换。这意味着选中一个矩阵，用它乘以平面上的所有向量，将得到一系列线性变换后的结果，即整个平面通过矩阵乘法发生了变换，这也是一个值得研究的结果。

现在有一个矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

如果用**A**乘以一个R^2空间的向量**v**——当然，**A**是2×2矩阵，它也只能乘以一个R^2空间的向量——将把**v**线性变换成另一个向量，变换后的向量的x分量不变，y分量与**v**的y分量相反：

$$\boldsymbol{Av}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ -y\end{bmatrix}$$



描述线性变换

我们的目的是理解线性变换，而理解线性变换的本质是确定线性变换背后的矩阵，虽然可以在脱离坐标和具体数值的情况下讨论线性变换，但是为了更好地描述，我们仍然有必要引入坐标系。

假设有一个三维向量，能够通过某种线性变换变成二维向量，这将是一个怎样的变换？

$$T:\ R^3 \to R^2$$

用矩阵描述这个关系，T(**v**) = **Av**，**v**是三维向量，通过**Av**变成了二维向量，那么**A**一定是一个2×3矩阵。任何一个2×3的矩阵都可以将一个三维向量线性变换成二维向量，每一个变换都对应一个具体的矩阵。

输入空间的基

对于平面内特定的向量$\mathbf{v}_1$，只要看看T($\mathbf{v}_1$)就可以了解线性变换对它产生的作用。我们对空间内其它向量的线性变换同样感兴趣，换句话说，我们想知道线性变换对于整个输入空间的影响。既然向量空间是由线性无关的向量张成的，那么只要知道平面内两个线性无关的向量，就可以了解平面内所有向量线性变换的结果。也就是说，只要知道输入空间的基，就能掌握线性变换对整个输入空间的影响。

$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$......$\mathbf{v}_n$是输入空间的一组基向量，把它称之为输入基。只要知道所有输入基的线性变换，就可以知道输入空间内任意向量的线性变换：

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$$

$$T(\boldsymbol{v})=c_1T(\boldsymbol{v}_1)+c_2T(\boldsymbol{v}_2)+\cdots+c_nT(\boldsymbol{v}_n)$$

坐标

先来看看什么是坐标。

R^n空间的坐标是一组数字，这些数字表示R^n空间的给定向量**v**由多少个基向量组成（基向量线性组合的系数），但是基向量不止一组，如果基向量改变了，坐标也随之改变，因此一般来说，坐标系建立在标准基的基础之上。例如一个三维空间的向量的坐标是(2,3,4)：

$$v = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

上式可以清晰地看到**v**是三个标准基向量的线性组合，尽管大多数时候我们都意识不到这种组合。

对于线性组合来说，一旦选定了一组基，坐标也随之确定。比如对于输入空间的任意一个向量**v**来说，都可以用基向量的唯一线性组合表示：

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

一旦向量确定，其线性组合也随之确定，此时c_1, c_2 ,…,c_n就是该向量的一组确定的坐标值。

线性变换与矩阵

我们的目的是确定线性变换背后的矩阵，矩阵是与坐标有关的（矩阵中的元素是确定的值），而线性变换与坐标无关。现在的问题是，如何把一个与坐标无关的线性变换变成一个与坐标有关的矩阵？

假设有T能够完成一个向量从n维空间到m维空间的线性变换：

$$T: R^n \to R^m$$

现在我们打算构造一个矩阵**A**来描述这个线性变换。在描述时需要两组基：输入空间的一组基来描述输入向量，以及输出空间的一组基来确定输出向量的坐标。这两组基一旦确定，对应的矩阵也就确定了。

$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$……$\mathbf{v}_n$是输入空间的一组基向量，来自R^n空间；$\mathbf{w}_1$,w_2……$\mathbf{w}_m$是输出空间的一组基向量，来自R^m空间。对于每个输入向量来说，都有具体的坐标值，该坐标由基向量的线性组合确定，然后把这些坐标值乘以某个矩阵**A**，将得到相应的输出向量，输出向量的坐标同样可以由输出空间的基确定。用矩阵**A**来表示线性变换，就是将矩阵乘以输入向量的坐标，得到它在输出空间的坐标。

值得注意的是，线性变换背后的矩阵**A**乘以的是输入向量的坐标，不是输入向量本身，得到的也是输出向量的坐标，不是输出向量本身。定义一个线性变换T(**v**)，对$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots + c_n\mathbf{v}_n$进行变换，如果用**A**描述这个变换，则**A**需要满足：

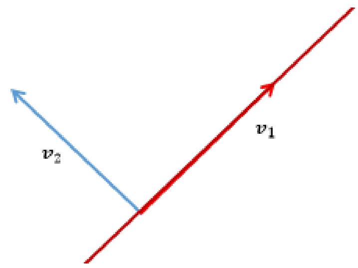
$$\boldsymbol{A}\underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}}_{\text{输入向量的坐标}} = \underbrace{\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{bmatrix}}_{\text{输出向量的坐标}}$$

之后用输出向量的坐标对输出空间的基向量进行线性组合，得到最终的输出向量**w**：

$$\boldsymbol{w} = d_1\boldsymbol{w}_1 + d_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{w}_n$$

由于我们之前一直使用的是标准基，因此感觉不到坐标的存在。

我们之前说过，投影属于线性变换，这里正好用投影的例子对上面的描述加以说明。为了简单起见，将这个投影定义在二维空间，n = m = 2。参与变换的向量都在平面上，让平面上的所有向量都投影在一条直线上。选择输入空间的两个基向量$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$代替R^2空间的标准基向量，其中$\mathbf{v}_1$沿着投影方向趴在直线上，$\mathbf{v}_2$垂直于投影方向：



上图特意去掉了坐标系，以强调线性变换与坐标无关。同时，由于输出空间也是R^2空间，我们也同样用$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$作为输出空间的基，即$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$。

之前说过，输入空间和输出空间的基一旦确定，对应的矩阵也就确定了。现在的问题是，根据$\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$和$\mathbf{w}_1$、$\mathbf{w}_2$如何描述这个用于线性变换的变换规则？也就是说，作用于线性变换的矩阵是什么？

对于出入空间的任意向量**v**，都可以表示成两个基向量的线性组合：

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$$

我们事先已经知道投影变换是一种线性变换，它线性变换的两个不变性：

$$T(\boldsymbol{v}) = T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = T(c_1\boldsymbol{v}_1) + T(c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2)$$

T表示投影变换，T($\mathbf{v}_1$)是$\mathbf{v}_1$的投影，沿着直线方向的向量的投影就是这个向量本身，所以T($\mathbf{v}_1$) = $\mathbf{v}_1$。$\mathbf{v}_2$垂直于直线，它的投影是零向量，所以T($\mathbf{v}_2$) = **0**。由此得到了投影变换和这组基向量的关系：

$$T(\boldsymbol{v}) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2) = c_1\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{0} = c_1\boldsymbol{v}_1$$

A用一组特殊的输入基和输出基（垂直于直线和沿着直线方向的一组基）描述了线性变换，将矩阵**A**乘以输入向量的坐标，得到它在输出空间的坐标：

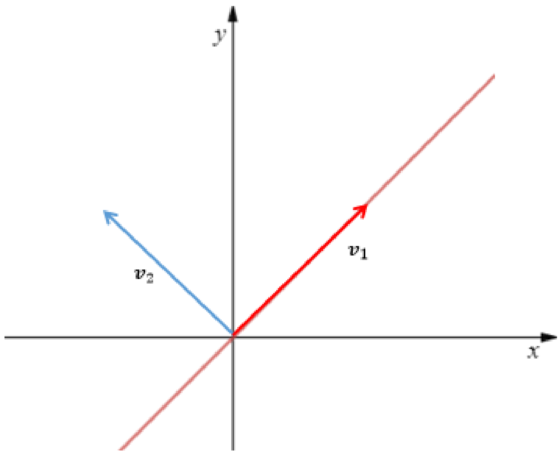
$$\boldsymbol{A}\underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}}_{\text{输入向量的坐标}} = \underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\0\end{bmatrix}}_{\text{输出向量的坐标}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

如果改用标准坐标基，即：

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

投影的直线也需要给出具体的位置，假设T(**v**)变换是将向量投影到45°的直线上：



现在尝试找出这个符合要求的矩阵，也就是投影矩阵。根据投影矩阵的公式，可以用向量**a** = (t, t)表示直线，从而求得投影矩阵：

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

在使用标准坐标基的时候，坐标值等于向量本身：

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}}_{\text{输入向量的坐标值}}$$

$$\boldsymbol{P}\underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}}_{\text{输入向量的坐标值}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1+c_2\\c_1+c_2\end{bmatrix}}_{\text{输出向量的坐标值}}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}(c_1+c_2)\boldsymbol{w}_1 + \frac{1}{2}(c_1+c_2)\boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{2}(c_1+c_2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}(c_1+c_2)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1+c_2\\c_1+c_2\end{bmatrix}}_{\text{输出向量的坐标值}}$$

可以看到，如果选择的基向量不同，即使对于同样的线性变换，背后的矩阵也不同。在使用标准坐标基的时候，感觉不到坐标的存在，此时矩阵乘以输入向量等于输出向量。实际上第一次是以投影矩阵的特征向量为基，得到的矩阵**A**是投影矩阵**P**的特征值矩阵。

如何确定矩阵

确定矩阵**A**的前提是需要知道输入空间和输出空间的基，我们依然用$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2......\boldsymbol{v}_n$和$\boldsymbol{w}_1,w_2......\boldsymbol{w}_m$表示这两组基。T($\boldsymbol{v}_1$)表示对输入空间的第一个基向量$\boldsymbol{v}_1$做线性变换，此时矩阵**A**乘以的坐标是(1,0,...,0)，得到的输出坐标是：

$$\boldsymbol{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1\text{的坐标}} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}}_{\text{输出向量的坐标}}$$

当知道线性变换的结果时，就可以通过它的坐标确定**A**的第一列。上式实际上描述了这样线性变换：

$$T(\text{输入向量}) = \text{输出向量}$$

$$T(\boldsymbol{v}_1) = a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m$$
$$T(\boldsymbol{v}_2) = a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{w}_m$$
$$\vdots$$
$$T(\boldsymbol{v}_n) = a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m$$

求导也是一种线性变换

这里有一个特殊的线性变换——求导，T = d/dx。我们之所以能够对函数求导，正是因为求导本身是一种线性变换，因此只需要掌握少量的求导法则，就能求出函数线性组合的导数。

假设输入空间的基是1, x, x^2，线性组合是$c_1 + c_2x + c_3x^2$；输出是导数：

$$T(c_1 + c_2x + c_3x^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) = c_2 + 2c_3x$$

输出空间的基是1, x。这是一个从三维空间到二维空间的线性变换：

$$T: R^3 \to R^2$$

描述这个线性变换的矩阵**A**满足：

$$\boldsymbol{A}\underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}}_{\text{输入的坐标值}} = \underbrace{\begin{bmatrix}c_2\\2c_3\end{bmatrix}}_{\text{输出的坐标值}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

随笔

分类: 线性代数

标签: 线性变换, 线性变换及对应矩阵

+加关注

« 上一篇： 线性代数笔记31——奇异值分解
» 下一篇： 线性代数笔记33——基变换和图像压缩