

# 我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

## 导航

- 博客园
- 首页
- 新随笔
- 联系
- 订阅
- 管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

## 公告

你的支持是我的动力  
 欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的  
 园龄：4年7个月  
 粉丝：288  
 关注：5  
 +加关注

**盖楼抽奖**  
 #她的梦想在发光#  
**HWD科技女性故事有奖征集**  
 分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)

## 搜索

## 常用链接

- 我的随笔
- 我的评论
- 我的参与
- 最新评论
- 我的标签

## 积分与排名

积分 - 457097  
 排名 - 1198

## 线性代数笔记32——线性变换及对应矩阵

原文：<https://mp.weixin.qq.com/s/qCmstZdzCy1WCfBAkEZEoA>

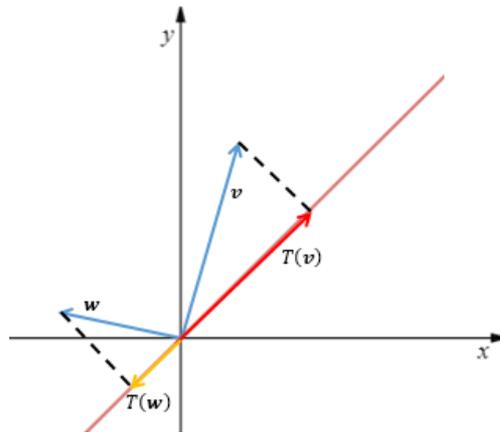
线性变换这个词在线性代数中经常被提及，每个线性变换的背后都有一个矩阵。矩阵的概念比较直观，相比之下，线性变换就显得抽象了。

### 线性变换

抛开矩阵，我们从变换的角度讨论投影。通过T变换，使平面内的一个向量投影到一条直线上：

$$T: R^2 \rightarrow R^2$$

T就像一个函数：给定一个输入向量，经过T的变换，输出成直线上的投影，过去我们一直用更专业的“映射”称呼这种变换关系。下图中 $v$ 和 $w$ 是 $R^2$ 空间内的向量，通过T变换变成了直线上的投影，即 $T(v)$ 和 $T(w)$ ：



变换的关系有很多，而线性代数只讨论线性变换。如果T表示一个线性变换关系，对于任意向量 $v$ 和 $w$ 以及标量 $c$ ，线性变换应该保证下面两个运算的不变性，加法不变性和数乘不变性，这一点和线性组合类似：

$$T(v + w) = T(v) + T(w)$$

$$T(cv) = cT(v)$$

把二者结合：

$$T(cv + dw) = cT(v) + dT(w)$$

顺便说一下，投影变换是一种线性变换。

### 判断线性变换

判断一个变换是否是线性变换其实并不困难，只要判断这个变换是否满足加法不变性和数乘不变性即可。

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)  
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°  
--猫猫猫猫大人

### 反例1: 平移整个平面

假设某个变换关系T是平面沿着某个方向平移 $v_0$ , 也就是说对于平面内的任意向量 $v$ , 都有 $T(v) = v + v_0$ , T变换是否是线性变换?

这个看起来很简单, 但并不是线性变换, 它违背了线性变换的两个不变性, 以数乘不变性为例:

$$\text{If } v_0 \neq 0, \text{ then } T(2v) = 2v + v_0 \neq 2v + 2v_0 = 2T(v)$$

线性变换的不变性要求对输入空间内的任意向量都成立, 当然也包括零向量, 因此一个更简单的判断方法就是使用零向量。数乘不变性对于零向量来说将有 $T(0) = 0$ , 但本例中 $T(0) = v_0$ , 所以说“平移”变换不是线性变换。

### 反例2: 求向量的长度

变换关系 $T(v) = \|v\|$ 是否是线性变换?

T变换将产生维度的变化。假设 $v$ 是一个三维向量, 经过T的变换将变成一个大于等于0的实数, 也就是一维向量:

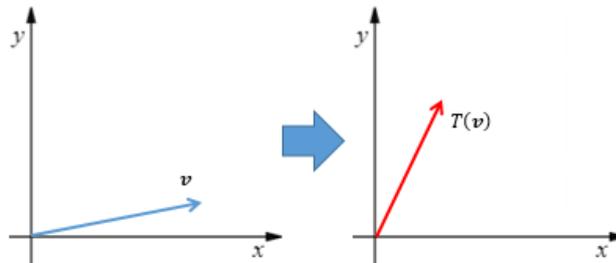
$$T: R^3 \rightarrow R^1$$

虽然本例满足 $T(0) = 0$ , 但是对于数乘不变性来说, 如果c是负数, 那么 $T(cv) \neq cT(v)$ , 因此本例不是线性变换。

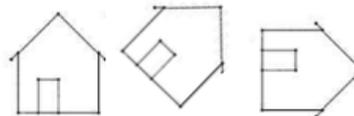
### 正例1: 旋转变换

变换关系 $T: R^2 \rightarrow R^2$ 是将一个二维空间的向量旋转45°, 这个变换是否是线性变换?

答案是肯定的, 它符合线性变换的两个不变性。



即使去掉坐标轴, 依然能够清晰地描述这个变换, 下图是对二维平面内的图形进行旋转:



### 正例2: 线性变换与矩阵

到目前为止, 线性变换还没有和矩阵产生任何关系。现在有一个变换关系是矩阵乘以一个向量,  $T(v) = Av$ , 其中A是一个矩阵。根据矩阵乘法的性质:

$$T(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = T(v) + T(w)$$

$$T(cv) = A(cv) = cAv = cT(v)$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$  与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

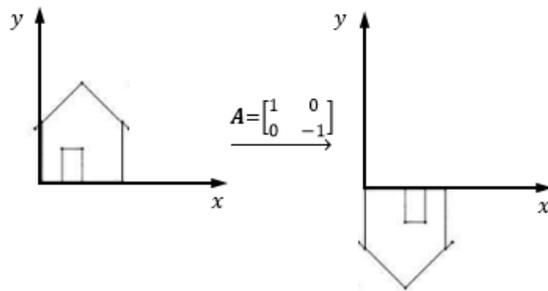
这符合线性变换的两个判据，因此矩阵乘以向量是一个线性变换。这意味着选中一个矩阵，用它乘以平面上的所有向量，将得到一系列线性变换后的结果，即整个平面通过矩阵乘法发生了变换，这也是一个值得研究的结果。

现在有一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

如果用A乘以一个 $R^2$ 空间的向量 $\mathbf{v}$ ——当然，A是 $2 \times 2$ 矩阵，它也只能乘以一个 $R^2$ 空间的向量——将把 $\mathbf{v}$ 线性变换成另一个向量，变换后的向量的x分量不变，y分量与 $\mathbf{v}$ 的y分量相反：

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



## 描述线性变换

我们的目的是理解线性变换，而理解线性变换的本质是确定线性变换背后的矩阵，虽然可以在脱离坐标和具体数值的情况下讨论线性变换，但是为了更好地描述，我们仍然有必要引入坐标系。

假设有一个三维向量，能够通过某种线性变换变成二维向量，这将是一个怎样的变换？

$$T: R^3 \rightarrow R^2$$

用矩阵描述这个关系， $T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ ， $\mathbf{v}$ 是三维向量，通过 $\mathbf{A}\mathbf{v}$ 变成了二维向量，那么A一定是一个 $2 \times 3$ 矩阵。任何一个 $2 \times 3$ 的矩阵都可以将一个三维向量线性变换成二维向量，每一个变换都对应一个具体的矩阵。

## 输入空间的基

对于平面内特定的向量 $\mathbf{v}_1$ ，只要看看 $T(\mathbf{v}_1)$ 就可以了解线性变换对它产生的作用。我们对空间内其它向量的线性变换同样感兴趣，换句话说，我们想知道线性变换对于整个输入空间的影响。既然向量空间是由线性无关的向量张成的，那么只要知道平面内两个线性无关的向量，就可以了解平面内所有向量线性变换的结果。也就是说，只要知道输入空间的基，就能掌握线性变换对整个输入空间的影响。

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 是输入空间的一组基向量，把它称之为输入基。只要知道所有输入基的线性变换，就可以知道输入空间内任意向量的线性变换：

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

## 坐标

先来看看什么是坐标。

$R^n$ 空间的坐标是一组数字，这些数字表示 $R^n$ 空间的给定向量 $\mathbf{v}$ 由多少个基向量组成（基向量线性组合的系数），但是基向量不止一组，如果基向量改变了，坐标也随之改变，因此一般来说，坐标系建立在标准基的基础上。例如一个三维空间的向量的坐标是(2,3,4)：

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

上式可以清晰地看到 $\mathbf{v}$ 是三个标准基向量的线性组合，尽管大多数时候我们都意识不到这种组合。

对于线性组合来说，一旦选定了一组基，坐标也随之确定。比如对于输入空间的任意一个向量 $\mathbf{v}$ 来说，都可以用基向量的唯一线性组合表示：

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

一旦向量确定，其线性组合也随之确定，此时 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 就是该向量的一组确定的坐标值。

## 线性变换与矩阵

我们的目的是确定线性变换背后的矩阵，矩阵是与坐标有关的（矩阵中的元素是确定的值），而线性变换与坐标无关。现在的问题是，如何把一个与坐标无关的线性变换变成一个与坐标有关的矩阵？

假设有 $T$ 能够完成一个向量从 $n$ 维空间到 $m$ 维空间的线性变换：

$$T: R^n \rightarrow R^m$$

现在我们打算构造一个矩阵 $\mathbf{A}$ 来描述这个线性变换。在描述时需要两组基：输入空间的一组基来描述输入向量，以及输出空间的一组基来确定输出向量的坐标。这两组基一旦确定，对应的矩阵也就确定了。

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 是输入空间的一组基向量，来自 $R^n$ 空间； $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ 是输出空间的一组基向量，来自 $R^m$ 空间。对于每个输入向量来说，都有具体的坐标值，该坐标由基向量的线性组合确定，然后把这些坐标值乘以某个矩阵 $\mathbf{A}$ ，将得到相应的输出向量，输出向量的坐标同样可以由输出空间的基确定。用矩阵 $\mathbf{A}$ 来表示线性变换，就是将矩阵乘以输入向量的坐标，得到它在输出空间的坐标。

值得注意的是，线性变换背后的矩阵 $\mathbf{A}$ 乘以的是输入向量的坐标，不是输入向量本身，得到的也是输出向量的坐标，不是输出向量本身。定义一个线性变换 $T(\mathbf{v})$ ，对 $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$ 进行变换，如果用 $\mathbf{A}$ 描述这个变换，则 $\mathbf{A}$ 需要满足：

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

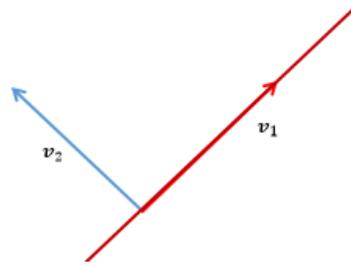
输入向量的坐标      输出向量的坐标

之后用输出向量的坐标对输出空间的基向量进行线性组合，得到最终的输出向量 $\mathbf{w}$ ：

$$\mathbf{w} = d_1 \mathbf{w}_1 + d_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + d_n \mathbf{w}_n$$

由于我们之前一直使用的是标准基，因此感觉不到坐标的存在。

我们之前说过，投影属于线性变换，这里正好用投影的例子对上面的描述加以说明。为了简单起见，将这个投影定义在二维空间， $n = m = 2$ 。参与变换的向量都在平面上，让平面上的所有向量都投影在一条直线上。选择输入空间的两个基向量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 代替 $\mathbb{R}^2$ 空间的标准基向量，其中 $\mathbf{v}_1$ 沿着投影方向趴在直线上， $\mathbf{v}_2$ 垂直于投影方向：



上图特意去掉了坐标系，以强调线性变换与坐标无关。同时，由于输出空间也是 $\mathbb{R}^2$ 空间，我们也同样用 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 作为输出空间的基，即 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$ ， $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$ 。

之前说过，输入空间和输出空间的基一旦确定，对应的矩阵也就确定了。现在的问题是，根据 $\mathbf{v}_1$ 、 $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{w}_1$ 、 $\mathbf{w}_2$ 如何描述这个用于线性变换的变换规则？也就是说，作用于线性变换的矩阵是什么？

对于出入空间的任意向量 $\mathbf{v}$ ，都可以表示成两个基向量的线性组合：

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$$

我们事先已经知道投影变换是一种线性变换，它线性变换的两个不变性：

$$T(\mathbf{v}) = T(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = T(c_1 \mathbf{v}_1) + T(c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2)$$

$T$ 表示投影变换， $T(\mathbf{v}_1)$ 是 $\mathbf{v}_1$ 的投影，沿着直线方向的向量的投影就是这个向量本身，所以 $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ 。 $\mathbf{v}_2$ 垂直于直线，它的投影是零向量，所以 $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ 。由此得到了投影变换和这组基向量的关系：

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) = c_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{0} = c_1 \mathbf{v}_1$$

$\mathbf{A}$ 用一组特殊的输入基和输出基（垂直于直线和沿着直线方向的一组基）描述了线性变换，将矩阵 $\mathbf{A}$ 乘以输入向量的坐标，得到它在输出空间的坐标：

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

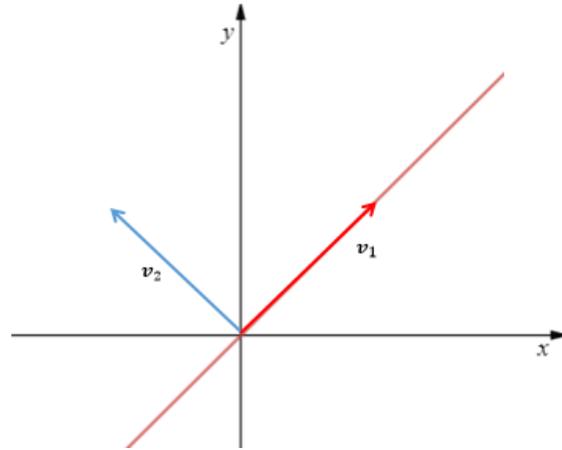
输入向量的坐标      输出向量的坐标

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果改用标准坐标基，即：

$$v_1 = w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

投影的直线也需要给出具体的位置，假设 $T(\mathbf{v})$ 变换是将向量投影到45°的直线上：



现在尝试找出这个符合要求的矩阵，也就是投影矩阵。根据投影矩阵的公式，可以用向量 $\mathbf{a} = (t, t)$ 表示直线，从而求得投影矩阵：

$$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

在使用标准坐标基的时候，坐标值等于向量本身：

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

输入向量的坐标值

$$P \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

输入向量的坐标值 输出向量的坐标值

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\mathbf{w}_1 + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\mathbf{w}_2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

输出向量的坐标值

可以看到，如果选择的基向量不同，即使对于同样的线性变换，背后的矩阵也不同。在使用标准坐标基的时候，感觉不到坐标的存在，此时矩阵乘以输入向量等于输出向量。实际上第一次是以投影矩阵的特征向量为基，得到的矩阵 $\mathbf{A}$ 是投影矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征值矩阵。

## 如何确定矩阵

确定矩阵 $\mathbf{A}$ 的前提是需要知道输入空间和输出空间的基，我们依然用 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ 表示这两组基。 $T(\mathbf{v}_1)$ 表示对输入空间的第一个基向量 $\mathbf{v}_1$ 做线性变换，此时矩阵 $\mathbf{A}$ 乘以的坐标是 $(1, 0, \dots, 0)$ ，得到的输出坐标是：

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$v_1$ 的坐标 输出向量的坐标

当知道线性变换的结果时，就可以通过它的坐标确定 $\mathbf{A}$ 的第一列。上式实际上描述了这样线性变换：

$T(\text{输入向量}) = \text{输出向量}$

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m$$

⋮

$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$$

### 求导也是一种线性变换

这里有一个特殊的线性变换——求导， $T = d/dx$ 。我们之所以能够对函数求导，正是因为求导本身是一种线性变换，因此只需要掌握少量的求导法则，就能求出函数线性组合的导数。

假设输入空间的基是 $1, x, x^2$ ，线性组合是 $c_1 + c_2x + c_3x^2$ ；输出是导数：

$$T(c_1 + c_2x + c_3x^2) = \frac{d}{dx}(c_1 + c_2x + c_3x^2) = c_2 + 2c_3x$$

输出空间的基是 $1, x$ 。这是一个从三维空间到二维空间的线性变换：

$$T: R^3 \rightarrow R^2$$

描述这个线性变换的矩阵 $A$ 满足：

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_3 \end{bmatrix}$$

输入的坐标值
输出的坐标值

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: 线性代数

标签: 线性变换, 线性变换及对应矩阵

好文要顶
关注我
收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

2
 推荐

0
 反对

+加关注

« 上一篇: [线性代数笔记31——奇异值分解](#)

» 下一篇: [线性代数笔记33——基变换和图像压缩](#)

posted on 2019-12-14 13:25 我是8位的 阅读(4502) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn 广告 X

**JAVA Office**  
**文档在线编辑**  
**APIs**

打开 >

**编辑推荐:**

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



**最新新闻:**

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
  - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
  - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
  - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
  - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes